

Huiswerk *Wiskundige Techn. 3* (WISN202).

A. Henriques, Juni 2013.

Inleverdatum: 19 Juni (aan het begin van de hoorcollege)

Opgave 1 Laat zien dat de eerste vier termen van de Laurent reeks ontwikkeling van $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ gegeven zijn door

$$\cot(x) = x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots$$

Opgave 2 Maak een lijst van all de polen en essentiële singulariteiten van de volgende functies:

$$\frac{1}{e^z - 1}; \quad \frac{\sin(2\pi z)}{z^3(2z - 1)}; \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Wat zijn de ordes van de polen?

Opgave 3 Bereken all de polen en all de residuen van de volgende functies

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)}; \quad \frac{z^2 - z}{1 - \sin(z)}; \quad \frac{\cos(z) - 1}{(e^z - 1)^2}.$$

Opgave 4 Laat zien dat voor $a > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{\pi}{a^3\sqrt{2}}.$$

Opgave 5 Laat zien dat voor $-1 < a < 1$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - a \cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Opgave 6 Zij Γ_n de vierkant in \mathbb{C} met hoekpunten $\pm(n + 1/2)(1 \pm i)$. Door de integraal

$$\oint_{\Gamma_n} \frac{\pi dz}{z^2 \sin(\pi z)}$$

uitterekenen, laat zien dat

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$